INTEGRALES IMPROPIAS

Las denominadas integrales impropias son una clase especial de integrales definidas (integrales de Riemann) en las que el intervalo de integración o la función en el integrando o ambos presentan ciertas particularidades. Las integrales impropias no son realmente una nueva forma de integrales, sino una extensión natural a las propiedades de la integral y un replanteamiento de nuestro concepto de área bajo la curva.

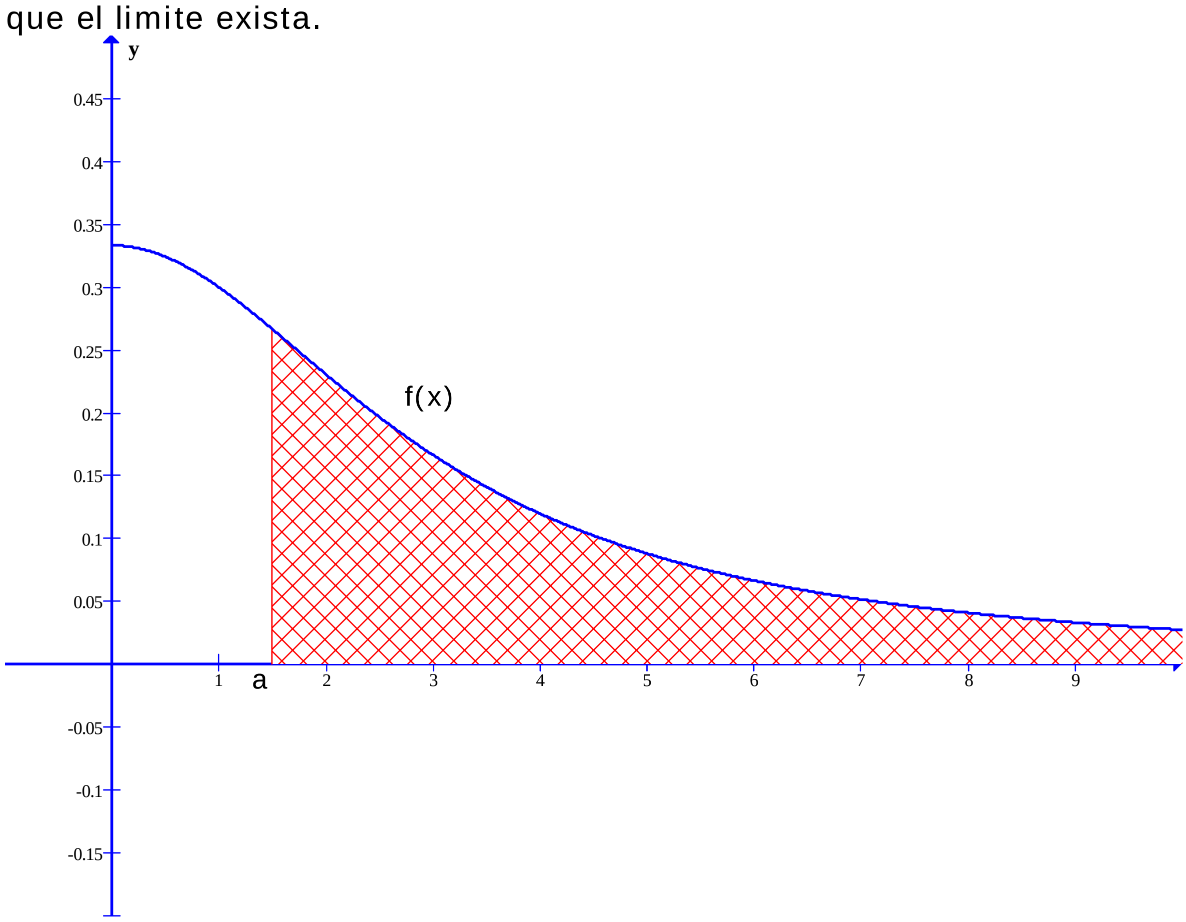
Una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ se denomina una integral impropia si verifica una de las siguientes condiciones:

a) El internar de integración es de la forma $(-\infty, b]$

b) El internar de integración es de la forma $[a, \infty)$

c) El internar de integración es de la forma $(-\infty, \infty)$

Definición. Sea $f(x)$ una función continua para todo $x \geq a$, entonces la integral impropia $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{m \to \infty} \int_a^m f(x)dx$ siempre que el limite exista.



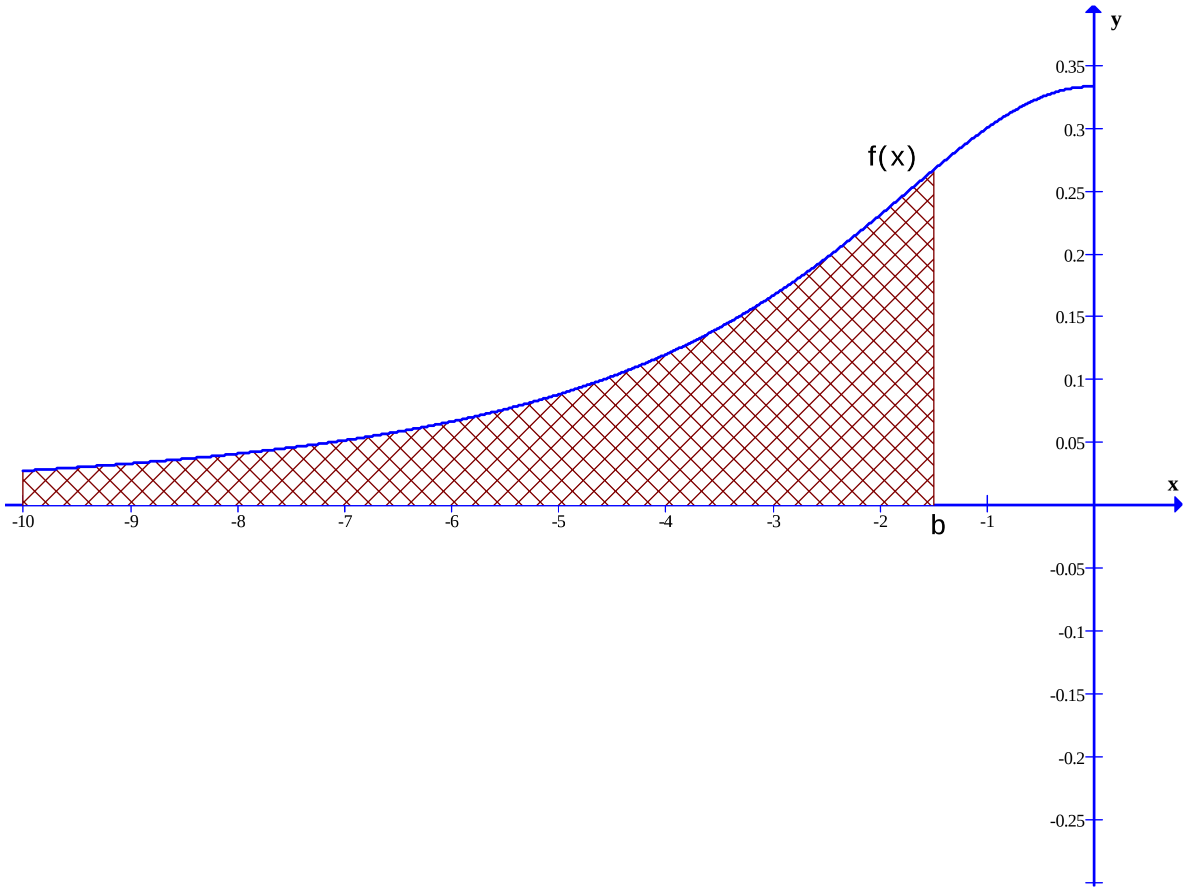
DANIEL SAENZ CONTRERAS

LICENCIADO EN MATEMATICAS Y FISICA . UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER

ESPECIALISTA EN COMPUTACION PARA LA DOCENCIA. UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO

ESPECIALISTA EN EDUCACION MATEMATICA. UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

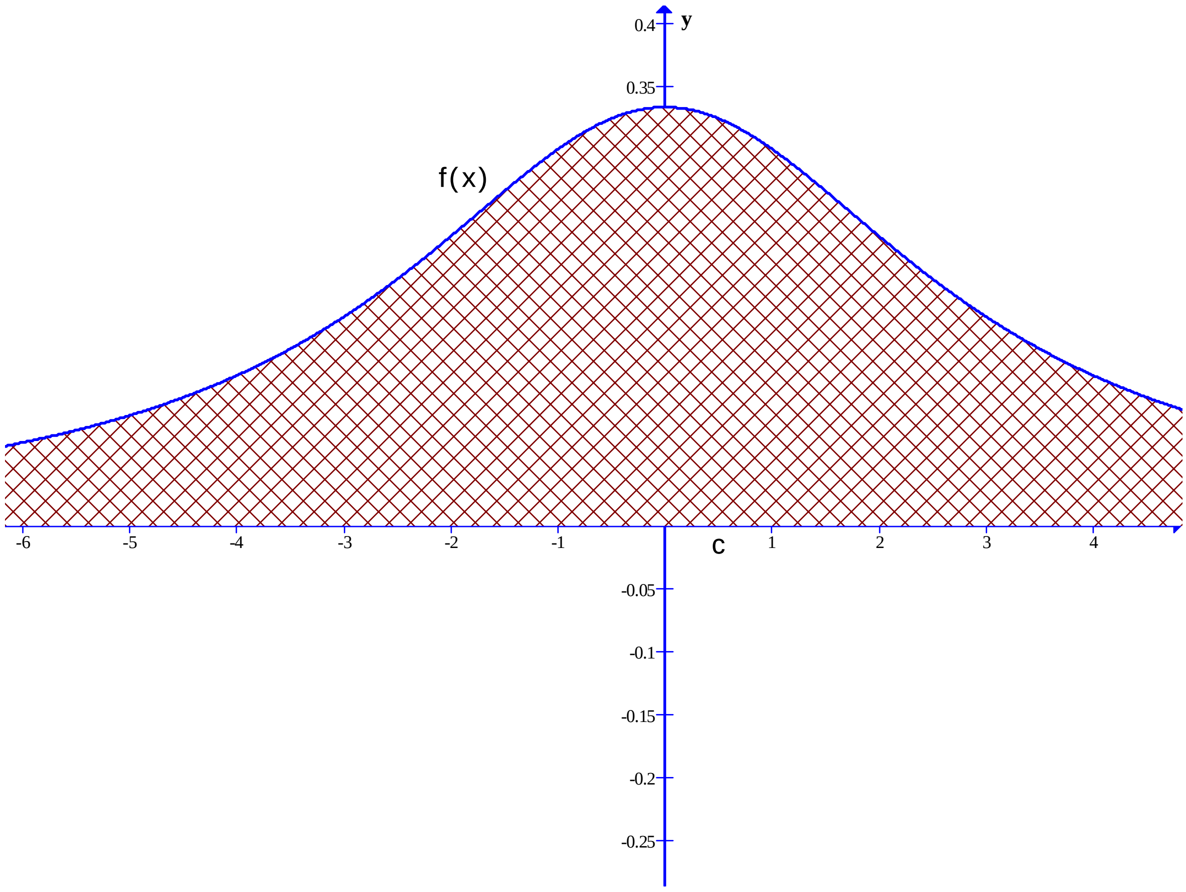
Definición. Sea $f(x)$ una función continua para todo $x \leq b$, entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{m \to -\infty} \int_{m}^{b} f(x)dx$ siempre que el limite exista.



Definición. Sea $f(x)$ una función continua para todo $x \in R$ y sea $c \in R$, entonces la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)dx$$ siempre que los limites existan.

DANIEL SAENZ CONTRERAS
LICENCIADO EN MATEMATICAS Y FISICA . UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER
ESPECIALISTA EN COMPUTACION PARA LA DOCENCIA. UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
ESPECIALISTA EN EDUCACION MATEMATICA. UNIVERSIDAD DE PAMPLONA



si los límites existen.

Definición Sea el intervalo ***[a,b)***, luego se entiende que $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$, de igual manera para ***(a,b]*** se tiene $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a+} \int_t^b f(x)dx$.

La definición previa es válida en funciones que son continuas en ***[a,b)*** y ***(a,b]*** respectivamente, sin embargo esas definiciones se pueden generalizar aún a funciones discontinuas en los extremos.

Definición: Sea el intervalo ***[a,b)***, en el cual ***f(x)*** es continua, pero discontinua en b, luego la integral $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$, si el límite existe. De la misma manera para ***f(x)*** continua en ***(a,b]***, pero discontinua en a, se tiene que $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a+} \int_t^b f(x)dx$, si dicho límite existe.

Las integrales de la definición 2, se denomina integrales impropias de primer orden, al igual que el siguiente caso:

DANIEL SAENZ CONTRERAS
LICENCIADO EN MATEMATICAS Y FISICA . UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER
ESPECIALISTA EN COMPUTACION PARA LA DOCENCIA. UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
ESPECIALISTA EN EDUCACION MATEMATICA. UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

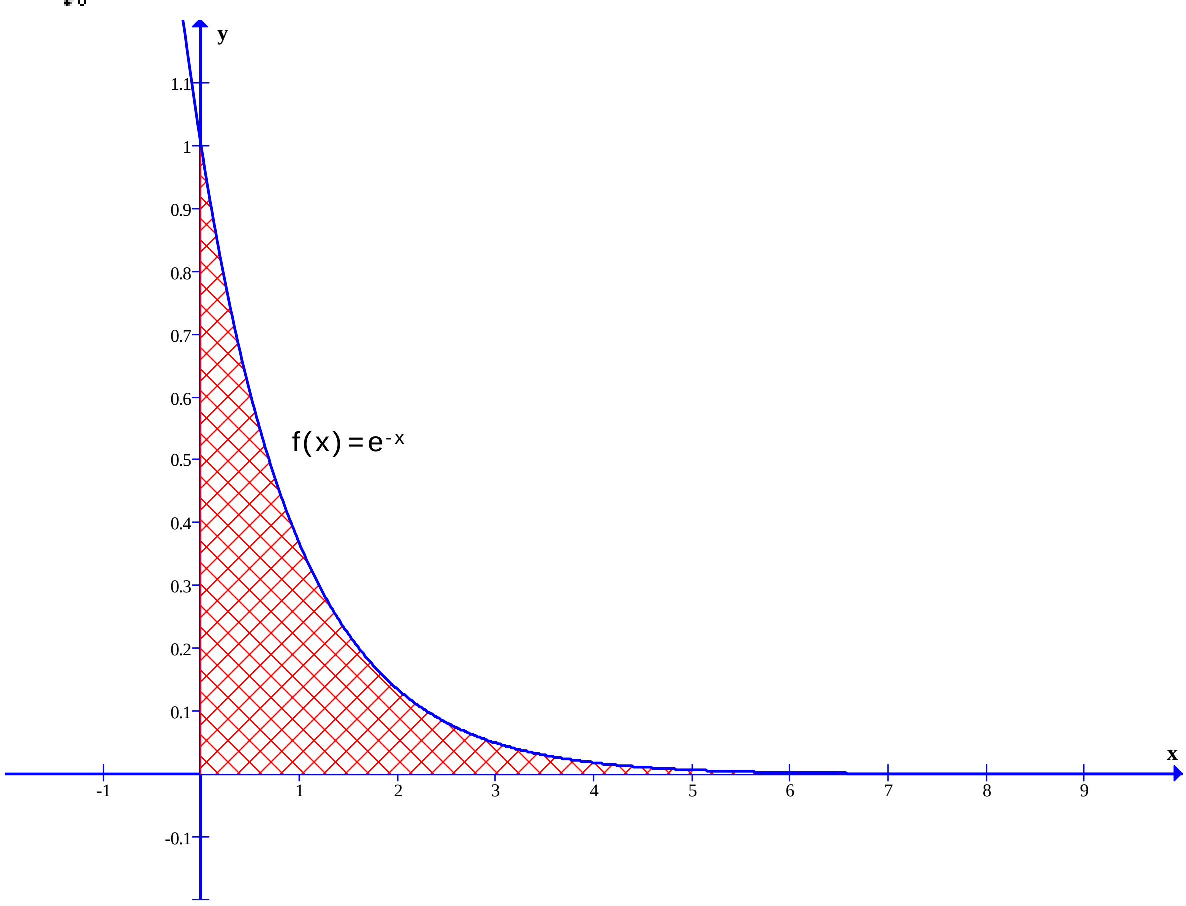
Definición: Sea ***f(x)*** una función discontinua en ***c*** dentro del intervalo ***(a,b)*** pero continua en todos los demás puntos de ***[a,b]***, se tiene que siempre que converjan las dos integrales impropias del lado derecho:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \to c^+} \int_t^b f(x)dx$$

En estas condiciones $\int_a^b f(x)dx$ es también una integral impropia de primer orden.

Cuando los límites, en las definiciones anteriores, existen, se dice que la integral es *convergente*, en caso contrario, se dice que la integral es *divergente*.

1. $\int_0^\infty e^{-x}dx$



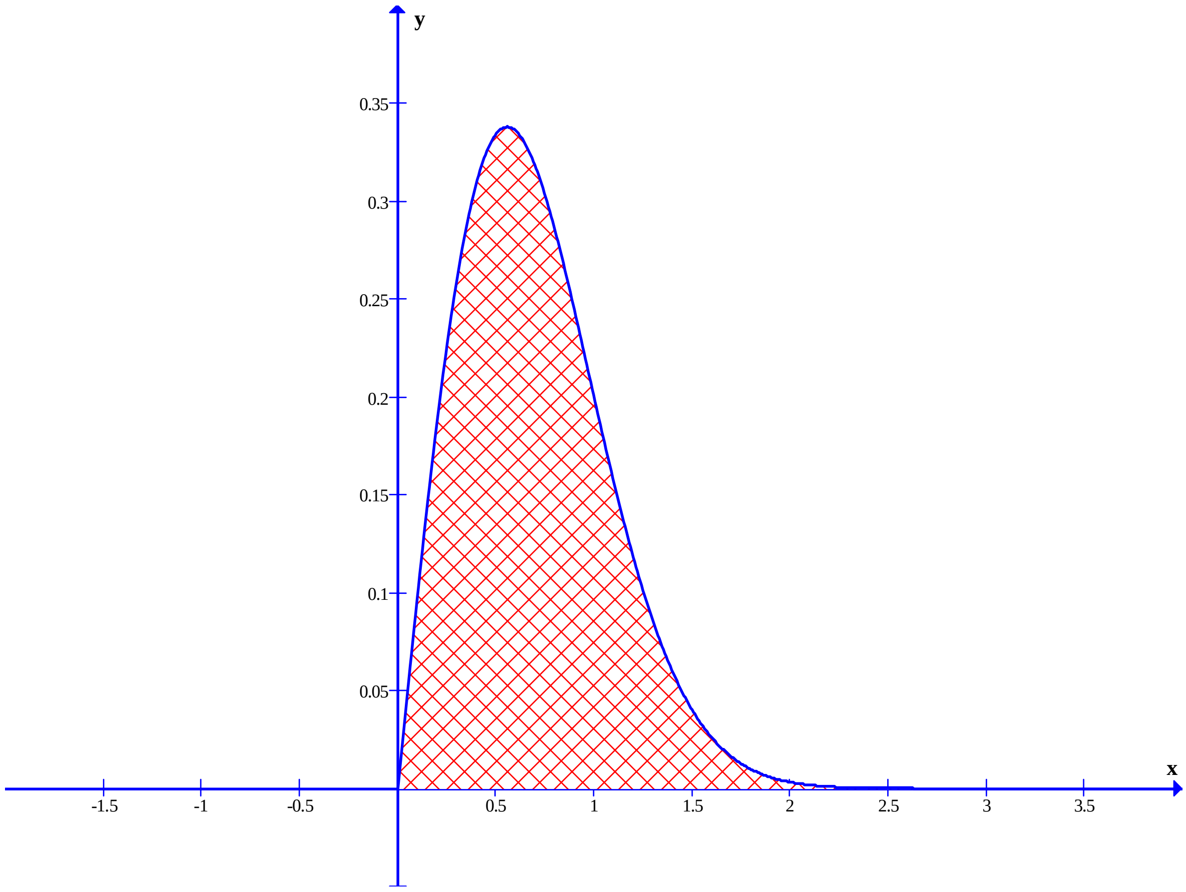
Solución:

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^x}\Big]_0^b\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^b}+\frac{1}{e^0}\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^b}+1\right) = (0+1);$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty e^{-x}dx = 1.$$

DANIEL SAENZ CONTRERAS
LICENCIADO EN MATEMATICAS Y FISICA . UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER
ESPECIALISTA EN COMPUTACION PARA LA DOCENCIA. UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
ESPECIALISTA EN EDUCACION MATEMATICA. UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

2. $\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx$



Solución:

$$\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} x5^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} 5^{-x^2}(xdx) \qquad (\clubsuit)$$

Sea

$$u = -x^2 \qquad (1),$$

$$\Rightarrow \quad du = -2xdx, \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2}du = xdx \qquad (2)$$

$$\text{Cuando: } \begin{cases} x = 0,\; u = 0 \\ x = a,\; u = -a^2 \end{cases} \qquad (3)$$

Sustituyendo (1), (2) y (3) en ($\clubsuit$), se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{-a^2}^{0} 5^u\left(-\frac{1}{2}du\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}\int_{-a^2}^{0} 5^u\,du\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int_{-a^2}^{0} 5^u\,du,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\left.\frac{5^u}{\ln 5}\right]_{-a^2}^{0}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{5^0}{\ln 5} - \frac{5^{-a^2}}{\ln 5}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\ln 5} - \frac{1}{5^{a^2}\ln 5}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 5} - 0\right) = -\frac{1}{2\ln 5}.$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x\,dx$

DANIEL SAENZ CONTRERAS
LICENCIADO EN MATEMATICAS Y FISICA . UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER
ESPECIALISTA EN COMPUTACION PARA LA DOCENCIA. UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
ESPECIALISTA EN EDUCACION MATEMATICA. UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

Solución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x\cosh x dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} x\cosh x dx \quad (\clubsuit)$$

Sea

$$u = x, \quad \Rightarrow \; du = dx$$

$$\Rightarrow \quad dv = \cosh x dx, \quad \Rightarrow \; v = \sinh x$$

De tal modo que, aplicando el método de integración por partes, se obtiene:

$$\int x\cosh x dx = x\sinh x - \int \sinh x dx = x\sinh x - \cosh x$$

Por lo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\left(x\sinh x - \cosh x\right]_a^0\right) + \lim_{b\to\infty}\left(\left(x\sinh x - \cosh x\right]_0^b\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x dx = \lim_{a\to-\infty}\left(0\cdot\sinh 0 - \cosh 0 - (a\sinh a - \cosh a)\right) +$$

$$\lim_{b\to\infty}\left(b\sinh b - \cosh b - (0\cdot\sinh 0 - \cosh 0)\right),$$

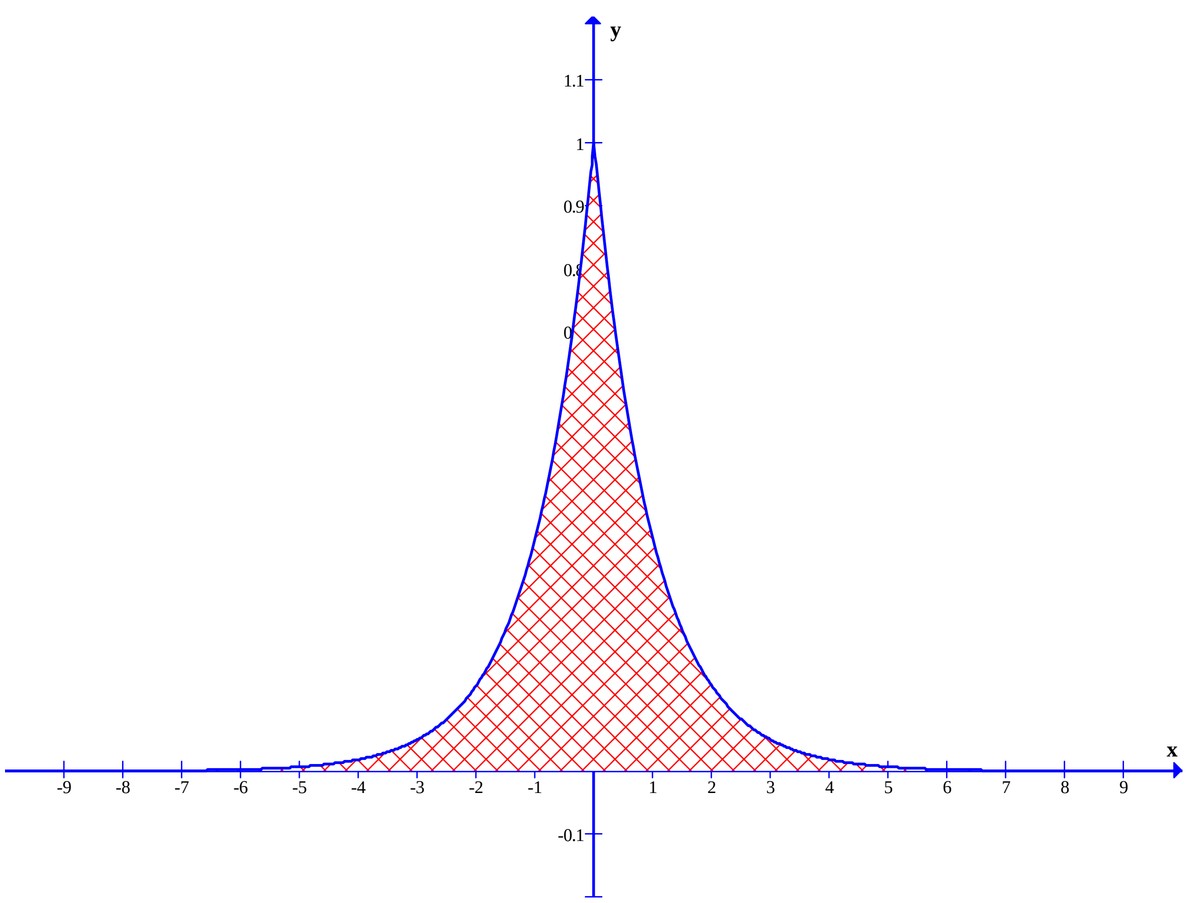
$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x dx = \lim_{a\to-\infty}\left(0 - 1 - a\sinh a + \cosh a\right) + \lim_{b\to\infty}\left(b\sinh b - \cosh b - (0-1)\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x dx = \lim_{a\to-\infty}\left(0 - 1 - a\sinh a + \cosh a\right) + \lim_{b\to\infty}\left(b\sinh b - \cosh b - (0-1)\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} x\cosh x dx = \lim_{a\to-\infty}\left(\cosh a - a\sinh a - 1\right) + \lim_{b\to\infty}\left(b\sinh b - \cosh b + 1\right)$$

La integral es divergente.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}$



DANIEL SAENZ CONTRERAS
LICENCIADO EN MATEMATICAS Y FISICA . UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER
ESPECIALISTA EN COMPUTACION PARA LA DOCENCIA. UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
ESPECIALISTA EN EDUCACION MATEMATICA. UNIVERSIDAD DE PAMPLONA

Solución:

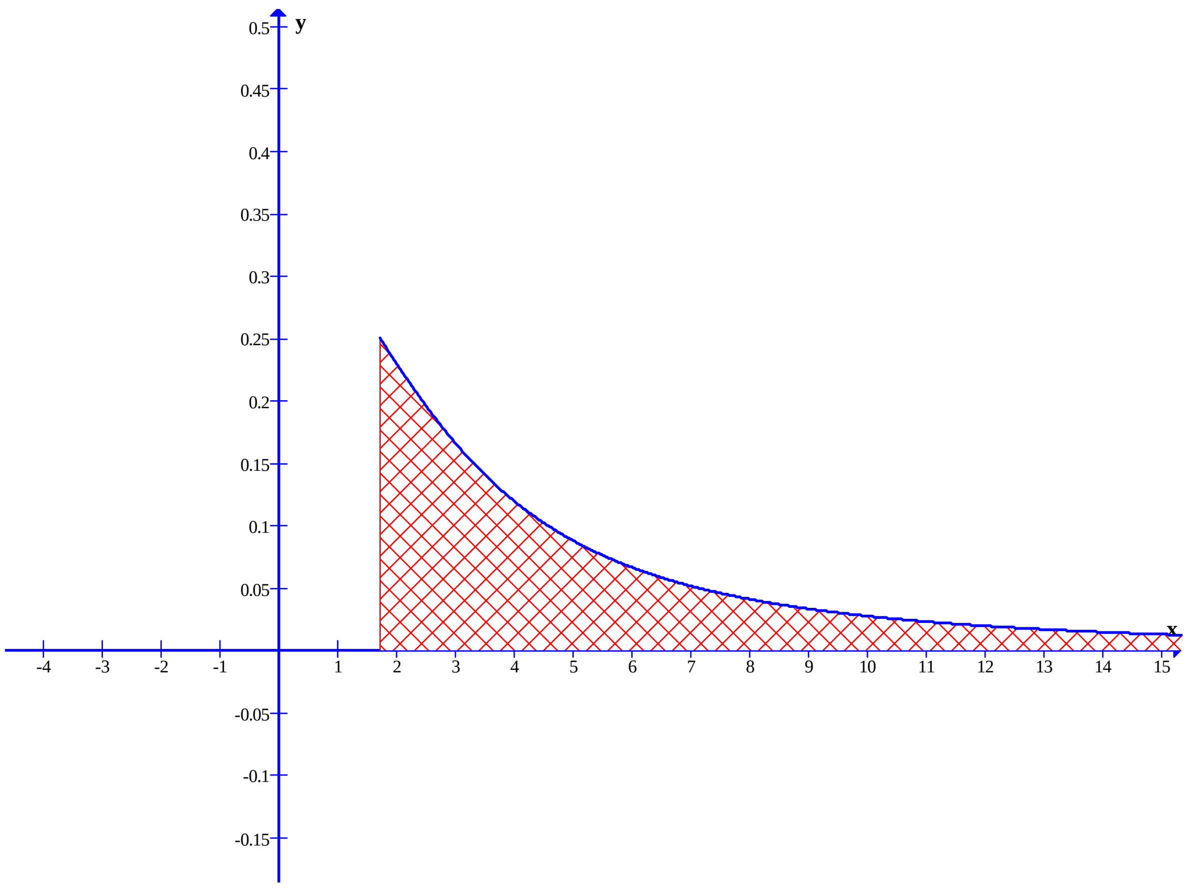
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{x}dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}dx,$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(e^{x}\Big]_{a}^{0}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{x}}\Bigg]_{0}^{b}\right) = \lim_{a\to-\infty}\left(e^{0}-e^{a}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{b}}+\frac{1}{e^{0}}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(1-e^{a}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{b}}+1\right) = (1-0)+(0+1);$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx = 2.$$

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{3}{x^{2}+9}\,dx$



Solución:

$$\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{3}{x^{2}+9}dx = 3\lim_{b\to\infty}\int_{\sqrt{3}}^{b} \frac{1}{x^{2}+3^{2}}dx = 3\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{x}{3}\Bigg]_{\sqrt{3}}^{b}\right) = 3\cdot\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\Bigg]_{\sqrt{3}}^{b}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{3}{x^{2}+9}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\Bigg]_{\sqrt{3}}^{b}\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\tan^{-1}\frac{b}{3}-\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6};$$

$$\therefore \quad \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{3}{x^{2}+9}dx = \frac{1}{3}\pi.$$

DANIEL SAENZ CONTRERAS

LICENCIADO EN MATEMATICAS Y FISICA . UNIVERSIDAD FRANCISCO DE PAULA SANTANDER
ESPECIALISTA EN COMPUTACION PARA LA DOCENCIA. UNIVERSIDAD ANTONIO NARIÑO
ESPECIALISTA EN EDUCACION MATEMATICA. UNIVERSIDAD DE PAMPLONA